7 Determinante

Determinante drugog reda računamo po formuli

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c.$$

Zadatak 7.1 *Izračunati*

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Rješenje:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1.$$

Zadatak 7.2 *Izračunati*

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Rješenje:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) = -8 + 3 = -5.$$

Determinante trećeg reda računamo na dva načina: Sarusovim pravilom ili LaPlasovim razvojem determinante po odabranoj vrsti ili koloni (prilikom LaPlasovog razvoja determinante veoma je povoljno odabrati vrstu ili kolonu koja ima nule i po njoj izvršiti razvoj).

Zadatak 7.3 *Izračunati*

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Rješenje:
Prvi način - Sarusovo pravilo

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} &= \left|\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{matrix} = \\ &= (1 + 8 + 72) - (6 - 12 - 8) = 95. \end{aligned}$$

Drugi način - LaPlasov razvoj (npr. po prvoj vrsti)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \\ &= 1\,(1 + 12) + 2\,(4 + 4) + 3\,(24 - 2) = \\ &= 13 + 16 + 66 = 95. \end{aligned}$$

Determinante četvrtog i većeg reda računamo LaPlasovim razvojem determinante po odabranoj vrsti ili koloni, i time red determinante smanjujemo za jedan.

Zadatak 7.4 *Izračunati*

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Rješenje:
Izvršimo LaPlasov razvoj ove determinante po prvoj vrsti

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} &= 4 \begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \\ &\quad +3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 4 \cdot (-18) - 2 \cdot (-26) + 3 \cdot 15 - 0 = 25 \end{aligned}$$

Zadatak 7.5 *Izračunati determinantu*

$$\begin{vmatrix} a & b & a & b \\ b & a & a & b \\ a & b & a & a \\ b & a & b & a \end{vmatrix}.$$

Rješenje:

Koristeći osobine determinanti, dobijamo

$$\begin{vmatrix} a & b & a & b \\ b & a & a & b \\ a & b & a & a \\ b & a & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & b & a-b & b \\ b-a & a & a-b & b \\ a-b & b & 0 & a \\ b-a & a & b-a & a \end{vmatrix} \begin{array}{l} \textit{Od prve kolone oduzeli drugu.} \\ \textit{Od treće kolone oduzeli četvrtu.} \\ \textit{Drugu i četvrtu kolonu prepisali.} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} a-b & b & a-b & b \\ -(a-b) & a & a-b & b \\ a-b & b & 0 & a \\ -(a-b) & a & -(a-b) & a \end{vmatrix} \begin{array}{l} \textit{Iz prve i treće kolone} \\ \textit{izvlačimo zajednički} \\ \textit{faktor } (a-b)\,. \end{array}$$

$$= (a-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & b & 1 & b \\ -1 & a & 1 & b \\ 1 & b & 0 & a \\ -1 & a & -1 & a \end{vmatrix} \begin{array}{l} \textit{Od druge kolone oduzmimo} \\ \textit{četvrtu.} \end{array}$$

$$= (a-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & b \\ -1 & a-b & 1 & b \\ 1 & -(a-b) & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} \begin{array}{l} \textit{Iz druge kolone izvlačim} \\ \textit{faktor } (a-b)\,. \end{array}$$

$$= (a-b)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & b \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} \begin{array}{l} \textit{Razvoj} \\ \textit{po drugoj koloni} \end{array}$$

$$= (a-b)^3 \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & a \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ -1 & 1 & b \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} \right)$$

$$= (a-b)^3 (-a-b+a-a+a+b-b+b+a+b) =$$

$$= (a-b)^3 (a+b)\,.$$

Zadatak 7.6 *Izračunati determinantu*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Rješenje:

Koristeći osobine determinanti, dobijamo

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \textit{Od druge vrste oduzmimo prvu} \\ \textit{Od treće vrste oduzmimo prvu} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \quad \textit{Razvoj po prvoj koloni}$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(b+a) \\ c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} \begin{array}{l} \textit{Izvlačimo faktore } (b-a) \textit{ i} \\ (b-a) \end{array}$$

$$= (b-a)(b-c)(c-a).$$

Zadatak 7.7 *Dokazati*

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = 4(a-b)(b-c)(a-c)\,.$$

Rješenje:

Množenjem elemenata prve kolone sa -1 i dodavanjem drugoj i trećoj koloni, dobijamo

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & a+1 \\ b^2 & 2b+1 & b+1 \\ c^2 & 2c+1 & c+1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a & a+1 \\ b^2 & b & b+1 \\ c^2 & c & c+1 \end{vmatrix} =$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\cdot\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = \\
&= 4\cdot\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2-a^2 & b-a & 0 \\ c^2-a^2 & c-a & 0 \end{vmatrix} = \\
&= 4\cdot\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ (b-a)\,(b+a) & b-a & 0 \\ (b-c)\,(b+c) & c-a & 0 \end{vmatrix} = \\
&= 4\,(b-a)\,(b-c)\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b+a & 1 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \end{vmatrix} = \\
&= 4\,(b-a)\,(b-c)\begin{vmatrix} b+a & 1 \\ b+c & 1 \end{vmatrix} = \\
&= 4\,(a-b)\,(b-c)\,(a-c)\,.
\end{aligned}
$$